



## Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a X-a

**SOLUȚII**

**Problema 1.** Să se rezolve, în mulțimea numerele reale, ecuația:

$$\log_3(2^x + 1) = \log_2(3^x - 1).$$

\* \* \*

**Soluție:** Condiție:  $3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ .

Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = \log_3(2^x + 1)$  este bijectivă, având inversa

$$f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log_2(3^x - 1).$$

Ecuația se scrie echivalent

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x, \quad (f \text{ este strict crescătoare}), \text{ deoarece se știe că graficele}$$

funcțiilor  $f$  și  $f^{-1}$  sunt simetrice în raport cu prima bisectoare. Deci valorile

$f(x)$ ,  $f^{-1}(x)$  vor coincide pe dreapta  $y = x$ , când  $f(x) = f^{-1}(x) = x$ . Ecuația

$$f(x) = x \Leftrightarrow \log_3(2^x + 1) = x \Leftrightarrow 2^x + 1 = 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 \text{ are soluția unică } x = 1.$$

**Problema 2.** Să se determine partea întreagă a numărului real

$$A = \sum_{k=1}^n 2^{k+1} \sqrt{\frac{2 \cdot k + 1}{2 \cdot k - 1}}, n \in \mathbb{N}^*$$

**Guiță Visilina, profesor, Galați**

**Soluție:**  $2^{k+1} \sqrt{\frac{2k+1}{2k-1}} = 2^{k+1} \sqrt{1 + \frac{2}{2k-1}} > 1, \forall k = \overline{1, n}$  de unde prin însumare după  $k$ , obținem

$A > n$ . Să demonstrăm că  $A < n + 1$ .

Conform inegalității mediilor, pentru fiecare  $k = \overline{1, n}$ , obținem

$$\begin{aligned}
\sqrt[2k+1]{\frac{2k+1}{2k-1}} &= \sqrt[2k+1]{1+\frac{2}{2k-1}} = \sqrt[2k+1]{\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{2k} \cdot \left(1+\frac{2}{2k-1}\right)} < \frac{2k \cdot 1 + 1 + \frac{2}{2k-1}}{2k+1} = \\
&= 1 + \frac{2}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = 1 + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}. \text{ Prin însumare, după } k, \text{ a celor } n \text{ inegalități} \\
&\text{obținem } A < n+1 - \frac{1}{2n+1} < n+1. \text{ Cum } n < A < n+1 \text{ rezultă că } [A] = n.
\end{aligned}$$

**Problema 3.** Se consideră numărul complex nenul  $z$ , cu  $|z| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\text{Să se demonstreze că } \left| \sum_{k=1}^n \operatorname{Im} z^k \right| < \sqrt{\frac{\operatorname{Re} \left( n - \sum_{k=1}^n \frac{z^{2k}}{|z|^{2k}} \right)}{2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

**Mihai Totolici, profesor, Galați**

**Soluție:** Fie  $z = r \cdot (\cos t + i \cdot \sin t)$ ,  $r \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $t \in [0, 2 \cdot \pi)$ . Inegalitatea din enunț

$$\text{devine: } \left( \sum_{k=1}^n r^k \cdot \sin(k \cdot t) \right)^2 < \frac{n - \sum_{k=1}^n \cos(2 \cdot k \cdot t)}{2}. \text{ Utilizând inegalitatea lui Cauchy-}$$

Buniakovski-Schwartz, obținem:

$$\begin{aligned}
\left( \sum_{k=1}^n r^k \cdot \sin(k \cdot t) \right)^2 &\leq \sum_{k=1}^n r^{2 \cdot k} \cdot \sum_{k=1}^n \sin^2(k \cdot t) = r^2 \cdot \frac{1-r^{2 \cdot n}}{1-r^2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1-\cos(2 \cdot k \cdot t)}{2} = \\
r^2 \cdot \frac{1-r^{2 \cdot n}}{1-r^2} \cdot \frac{n - \sum_{k=1}^n \cos(2 \cdot k \cdot t)}{2} &< \frac{n - \sum_{k=1}^n \cos(2 \cdot k \cdot t)}{2} \text{ deoarece}
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Din } r \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &\Rightarrow 0 < 1 - r^{2 \cdot n} < 1, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^* \\ 0 < \frac{r^2}{1-r^2} < 1 &\left( \text{pentru că } r^2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow r^2 \cdot \frac{1-r^{2 \cdot n}}{1-r^2} < 1.$$

**Problema 4.** Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+4)$ .

Să se determine  $f(\mathbb{R})$ .

**Constanța Gusta, profesor, Galați**

**Soluție:**

$$f(x) = [(x+1) \cdot (x+4)] \cdot [(x+2) \cdot (x+3)] \Rightarrow f(x) = (x^2 + 5 \cdot x + 4) \cdot (x^2 + 5 \cdot x + 6) \Rightarrow$$

$$f(x) = (x^2 + 5 \cdot x)^2 + 10 \cdot (x^2 + 5 \cdot x) + 24.$$

Fie funcțiile  $g(x) = x^2 + 5 \cdot x, x \in \mathbb{R}$  și  $h(x) = x^2 + 10 \cdot x + 24, x \in \mathbb{R}$ .

Atunci  $f(x) = (h \circ g)(x)$ ,  $(\forall) x \in \mathbb{R}$ . Observăm că

$$\min_{x \in \mathbb{R}} (g(x)) = -\frac{25}{4} \Rightarrow g(\mathbb{R}) = \left[-\frac{25}{4}, \infty\right);$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}} (h(x)) = -1 \Rightarrow h\left(\left[-\frac{25}{4}, \infty\right)\right) = [-1, \infty);$$

Așadar, funcțiile  $g : \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{25}{4}, \infty\right)$  și  $h : \left[-\frac{25}{4}, \infty\right) \rightarrow [-1, \infty)$  sunt surjective, de unde

rezultă că și funcția  $h \circ g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, \infty)$  este surjectivă  $\Rightarrow (h \circ g)(\mathbb{R}) = [-1, \infty)$ . Rezultă că

$$f(\mathbb{R}) = [-1, \infty).$$